Ю.В. Шорохова, Т.В.Павлова
Ишимский педагогический институт им. П.П. Ершова (филиал) ТюмГУ, г. Ишим

УДК 519.1

О ПЛАНАРНЫХ ГРАФАХ И СВЯЗАННЫХ С НИМИ ЗАДАЧАХ

Аннотация. В статье представлены основные понятия графов, история их появления, описан метод конструктивного построения плоской укладки планарного графа, поэтапно представлен способ решения задачи при помощи алгоритма Дейстры и алгоритма Хакими.

Ключевые слова: граф, планарные графы, алгоритмы на графах, алгоритм Хакими, алгоритм Дейстры.

Введение

На сегодняшний день графы широко используются для представления знаний в различных областях, таких как: алгебра и теория чисел, программирование, социология, лингвистика, экономика, строительство и многие другие. Немало задач анализа программ, возникающие при проверке правильности, тестировании, трансляции, вычислении оптимальных маршрутов и т.д., намного упрощаются, если их рассматривать как модель графа. Что же такое «универсальное чудо» математики – граф?

Теория графов зародилась двести с лишним лет назад, при решении головоломок. Первая работа по теории графов принадлежащая известному швейцарскому математику Л. Эйлеру, появилась в 1736 году, который сформулировал задачу о семи кёнигсбергских мостах, ставшей впоследствии одной из классических задач теории графов. Толчок к развитию теория получила на рубеже XIX и XX столетий, когда резко возросло число работ в области комбинаторики. Графы стали использоваться при построении схем электрических цепей и молекулярных схем. Как отдельная математическая дисциплина, теория графов была впервые представлена в работе венгерского математика Кенига в 30-е годы XX столетия [1].

Граф $G(V,E)$ – комбинаторный объект, состоящий из двух конечных множеств: V – множество вершин и множество пар элементов из V, т.е. $E \subseteq V \times V$, называемого множеством ребер, если пары неупорядочены, и множеством дуг, если пары упорядочены. В первом случае граф $G(V,E)$ называется неориентированным, во втором ориентированным [2].

Другими словами, граф – это совокупность точек, соединенных между собой отрезками, а точки являются вершинами. Линии, соединяющие вершины, называют дугами, если их направление задано от одной вершины к другой или ребрами, если направленность двусторонняя, т.е. направления равноправны. Вершины и ребра графа могут характеризоваться некоторыми числовыми значениями, например, может быть известна длина ребра, такие характеристики называют весом, а сам граф при этом – взвешенным.

Алгоритмы решения задач на графах

Рассмотрим более подробно планарные графы. Планарный граф – это граф, допускающий укладку на плоскости, такой граф может быть изображен на плоскости так, что никакие ребра не имеют общих точек, кроме своих вершин. Если построить изображение графа на плоскости с соблюдением данного условия, то такой граф будет называться плоским. Планарный граф изображается системой непересекающихся ребер на плоскости. Если граф не планарен, то приходится выносить отдельные ребра в другую плоскость[4]. Дл того, чтобы найти плоскую укладку планарного графа, можно использовать следующие правила конструктивного построения:

Произвольным образом пронумеруем все элементы, которые могут быть связаны. Затем, ищем в выбранном порядке все вершины и соединим их прямыми, соединяя каждую пару элементов (k и k + 1). При этом первая вершина оказывается на этом этапе связанной только со второй, а на последней вершине процедура заканчивается. Далее соединим элементы через один (показано дугами, расположенными ниже и выше прямой). Очевидно, что таких связей еще не было ранее. Также свяжем вершины через две, начиная с крайних, выше и ниже линии. В общем случае потом связываем через три, через четыре и т. д., располагая все связи ниже или выше линии, так что до первого и последнего элемента всегда существует подход извне. Последней будет связь крайних элементов (первого и последнего).

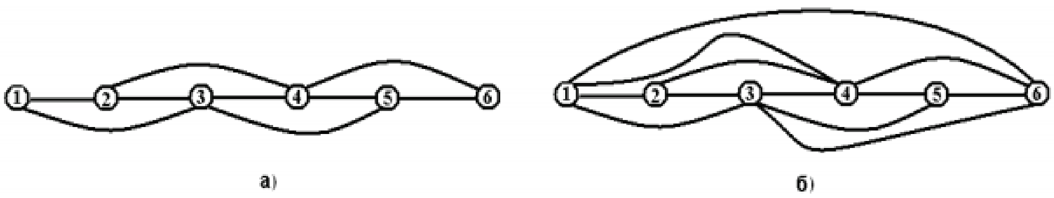


Рис. 1. Метод конструктивного построения

На рис. 1 приведена иллюстрация конструктивного построения планарного графа для 6 элементов (а – начало построения цепи и связей по правилу «через два»; б – заключительные этапы построения). На рис. 1б показаны не все возможные связи, например, отсутствует связь между 1 и 5. Но на плоскости не всегда удается связать элементы, если связи должны быть незаурядными [3].

Существует множество алгоритмов для решения различных задач с использованием графов. Например, такие алгоритмы как: алгоритм построения эйлерового пути, алгоритм Дейкстры, алгоритм Беллмана-Форда, алгоритм Краскала, алгоритм Хакими и т.д.

На примере решения задачи рассмотрим алгоритм Хакими и Дейкстры, позволяющий найти кратчайшие пути от одной из вершин графа до всех остальных.

Задача: Имеется некоторый населенный пункт со своей сетью дорог. Требуется найти оптимальное место для размещения пункта медицинской помощи. Для решения необходимо представить сеть дорог в виде графа, где вершинами будут являться предполагаемые оптимальные места (x_1, x_2,x_3,x_4,x_5) соединяющиеся ребрами – в нашем случае дорогами, как видно на рис. 2, их семь. Для решения задачи условно нужно определить вес дорог, будем считать километры (1,2,3,4,4,6,7). Оптимальное место расположения будем искать не в вершинах, а на самих ребрах. Таким образом, требуется найти такое место расположения пункта, чтобы минимизировать расстояние пути до самой дальней точки дорожной сети.

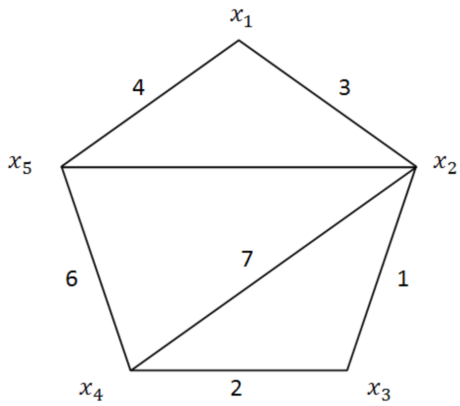


Рис. 2

Алгоритм поиска места оптимального для размещения медицинского пункта, рассмотрим с помощью алгоритма Дейкстры:

1-й этап – построение матрицы кратчайших расстояний D.

Исходя из значений длин ребер, получается данная матрица кратчайших расстояний

a_{1-1}=0	a_{1-2}=3	a_{1-3}=4	a_{1-4}=6	a_{1-5}=4
a_{2-1}=3	a_{2-2}=0	a_{2-3}=1	a_{2-4}=3	a_{2-5}=7
a_{3-1}=4	a_{3-2}=1	a_{3-3}=0	a_{3-4}=2	a_{3-5}=8
a_{4-1}=6	a_{4-2}=3	a_{4-3}=2	a_{4-4}=0	a_{4-5}=6
a_{5-1}=4	a_{5-2}=7	a_{5-3}=8	a_{5-4}=6	a_{5-5}=0

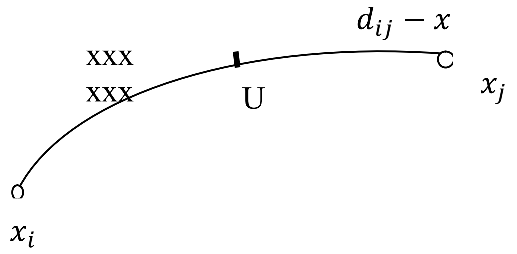
$$D=\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0 & 3 & 4 & 6 & 4 \\ \hline 3 & 0 & 1 & 3 & 7 \\ \hline 4 & 1 & 0 & 2 & 8 \\ \hline 6 & 3 & 2 & 0 & 6 \\ \hline 4 & 7 & 8 & 6 & 0 \\ \hline \end{array}$$

2-й этап – получение верхней оценки расстояния до наиболее удаленной точки. Выбрать $R_i = \max_j\{D\}$ и затем $R = \min_i\{R_i\}$. В данном случае R_i =6,7,8,6,8, следует, что R=6.

3-й этап – получение нижних оценок для ребер: $\delta_{ij} = \max_k\left\{\min\{d_{ik}; d_{jk}\}\right\}$. На основе полученных оценок отобрать те ребра, у которых оценка меньше верхней, полученной на 2-ом этапе. Начинать целесообразно с ребра с наименьшей оценкой.

a							
	6	4	6	7	6	3	4

На основе полученных оценок отобраны ребра: a_{1-2}, a_{2-5}, a_{4-5}.

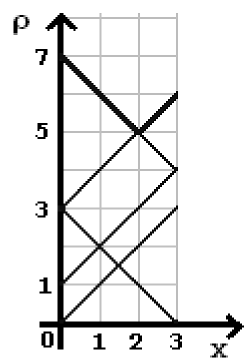


4-й этап – исследование ребер по алгоритму Хакими:
для выбранного ребра обозначить расстояние от x_i до U (медицинский пункт) чрез x, тогда от x_j до U расстояние будет равным $d_{ij} - x$.

Алгоритм Хакими (поиск абсолютного центра в графе).

Для всех вершин записать функционалы $\rho kU(x) = \min\{x + d_{ik};\ d_{ij} - x + d_{jk}\}$ и построить их графики на отрезке $x \in [0; d_{ij}]$. Построить «верхнюю огибающую» $\rho(x) = \max_k\{\rho kU(x)\}$. Найти ее точку минимума и минимальное значение. Если полученный минимум меньше текущей лучшей оценки, то найдено лучшее место расположения. При этом из списка « перспективных» ребер нужно исключить те, у которых оценка не ниже полученного минимума. Для остальных повторить алгоритм Хакими.

Запишем функционалы для ребра a_{1-2} и на основании полученных функций построим график на отрезке $x \in [0; 3]$



$\rho_{1u}(x) = \min\{x + 3; 3 - x\} = 3 - x$

$\rho_{2u}(x) = \min\{x; 3 - x + 3\} = x$

$\rho_{3u}(x) = \min\{x + 1; 3 - x + 4\} = x + 1$

$\rho_{4u}(x) = \min\{x + 3; 3 - x + 6\} = x + 3$

$\rho_{5u}(x) = \min\{x + 7; 3 - x + 4\} = 7 - x$

Из графика видно, что $x_0 = 2$ и $\rho = 5$, следует, что расстояния до других вершин будут равны: $\rho_{1u}(2) = 1$, $\rho_{2u}(2) = 2$, $\rho_{3u}(2) = 3$, $\rho_{4u}(2) = 5$, $\rho_{5u}(2) = 5$.

5-ый этап – выбор решения. Если минимальная оценка достигнута для одного ребра, то оптимальное место расположения найдено. Если таких несколько, то следует произвести выбор на основе иных соображений.

Минимальная оценка достигнута при решении, следует, если расположить медицинский пункт на данной дороге (ребре a_{1-2}), расстояние до самой отдаленной точки будет минимальным. Данное ребро подходит по условию, но также для достоверности можно проверить и остальные.

Метод Хакими является трудоемким и его алгоритм можно поместить в программу, которая при использовании алгоритма, сразу выдаст искомую точку, что значительно может сэкономить время.

Заключение

Графы – математические объекты, которые действительно являются универсальными, при их помощи решают математические, экономические, логические задачи, так же при помощи графов можно упростить условия задач по физике, химии, биологии, графы используются при составлении карт и генеалогических деревьев и многое другое. Теория графов является частью многих наук. Теория графов может иметь широкое применение в учебном процессе, данная ветвь науки является не только увлекательной, но и познавательной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. История графов [Электронный ресурс].- Режим доступа: https://sites.google.com/a/labore.ru/teoria-grafov/vvedenie-v-teoriu/istoria-grafov (дата обращения 1.04.2017).
2. Оре, О. Теория графов[Текст] // А. Оре. – М .: Наука, 2010. – 336 с.
3. Мазный, Г.Л. Дискретная математика [Текст] // Г.Л. Мазный, Т.Б. Прогулов. – Дубна: Международный университет природы, общества и человека, 2014. – 284 с.
4. Планарные графы [Электронный ресурс].- Режим доступа: http://www.studfiles.ru/preview/2875371/ (дата обращения 3.04.2017).

240